Teoria miary i całki
SPPI IIr. semestr zimowy 2006/7
LISTA 11

20/11/06

Zadanie 1
Udowodnij, że jeśli $f = f_1 - f_2$, gdzie f_1 i f_2 są nieujemne, to $f_1 \geq f^+$ i $f_2 \geq f^-$.

Zadanie 2
Wykazać, że jeśli $g \geq 0$ to
$$(fg)^+ = f^+ g.$$
W szczególności $(f|_E)^+ = f^+|_E$.

Zadanie 3
Wykaż, że $(fg)^+ \neq f^+ g^+ + f^- g^-$.

Zadanie 4
Udowodnij, że jeśli całka $\int_E f \, d\mu$ ma sens i $F \subset E$, to $\int_F f \, d\mu$ również ma sens.

Zadanie 5
Wykazać, że funkcja f na $\mathbb{R}$ ma dobrze określoną całkę właściwą lub niewłaściwą Riemanna
$$\int_a^b f \, dx$$
$(a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\})$ wtedy i tylko wtedy gdy dobrze określone są całki Riemanna z f^+ i f^- (również od a do b) oraz przynajmniej jedna z nich jest skończona.
Uwaga! To zadanie nie ma nic wspólnego z teorią całki Lebesgue'a.

Zadanie 6
Wykazać, że jeśli funkcja f na $\mathbb{R}$ ma dobrze określoną całkę właściwą Riemanna $\int_a^b f \, dx$ $(a, b \in \mathbb{R})$, to funkcja $\mathbf{1}_{[a,b]} \cdot f$ ma dobrze określoną całkę Lebesgue'a i
$$\int_a^b f \, dx = \int_{[a,b]} f \, d\lambda.$$
Podaj przykład, że nie jest to prawdziwe dla całek niewłaściwych.
Wsk. Zauważ, że całkę niewłaściwą Riemanna liczy się zupełnie inaczej niż całkę Lebesgue'a.

Zadanie 7
Oblicz całkę Lebesgue'a $\int f \, d\mu$, gdzie
a)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ dla } x \text{ wymiernych, gdzie } x = \frac{p}{q} \text{ jest w postaci nieskracalnej} \\ e^x, & \text{dla } x \text{ niewymiernych,} \end{cases}$$

a μ jest miarą Lebesgue'a na $[-1,1]$.

b) $f(x) = x^2$, a μ jest miarą określoną wzorem

$$\mu(E) = \int_{E\cap(0,1]} (-\log x)\, dx.$$

c) $f(x) = x + \sin x$, a μ jest miarą określoną wzorem

$$\mu(E) = \tfrac{1}{2}\lambda(E\cap[-2,2]) + \tfrac{1}{3}\#\{n \in \mathbb{N}\cap[-3,3] : n\tfrac{\pi}{2} \in E\}.$$